Revista ENTROPIA EDUCATIVA

ISSN: 2981-4723 (En línea) VOL 1 N° enero - junio 2024 pp. 27- 34

Universo Fractal

Fractal Universe

Aprobado 12-03-2024

Nicole Galvis Ramírez
Colombia
Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca
ngalvisr@unicolmayor.edu.co
Estudiante de Diseño Digital y Multimedia

Resumen

El artículo explora la geometría fractal, una rama de las matemáticas que estudia las estructuras que se replican a sí mismas a diferentes escalas. Los fractales tienen aplicaciones en diversos campos, como el diseño, la animación por computadora, la biología, la economía y la demografía.

El autor describe cómo los fractales se han utilizado en películas como "La Guerra de las Galaxias" y "Doctor Strange" para generar efectos visuales realistas, como simulaciones de lava y escenarios complejos. Además, se presentan algunas figuras fractales famosas, como la esponja de Menger, el triángulo de Sierpinski y la curva de Koch, resaltando sus propiedades contraintuitivas, como perímetros infinitos y áreas finitas.

El artículo también explora la conexión entre los fractales y el crecimiento de las poblaciones, utilizando la función logística para modelar el crecimiento limitado de las poblaciones biológicas. Se contrasta con la sucesión de Fibonacci, que describe un crecimiento ideal e ilimitado, y se analiza cómo el crecimiento descontrolado de una población puede conducir al caos, cuya geometría está representada por el conjunto de Mandelbrot.

En resumen, el artículo destaca la versatilidad y la importancia de los fractales en diversos campos, desde el entretenimiento hasta la biología y la demografía, resaltando su belleza matemática y su capacidad para describir patrones complejos en la naturaleza.

Palabras clave: Fractales, Crecimiento poblacional, Aplicaciones cinematográficas, Geometría no euclidiana

Revista ENTROPIA EDUCATIVA
ISSN: 2981-4723 (En línea) VOL 1 N° enero - junio 2024 pp. 27- 34

Abstract

The article explores fractal geometry, a branch of mathematics that studies structures that replicate themselves at different scales. Fractals have applications in diverse fields such as design, computer animation, biology, economics and demography.

The author describes how fractals have been used in movies like "Star Wars" and "Doctor Strange" to generate realistic visual effects, such as lava simulations and complex settings. Additionally, some famous fractal figures are presented, such as the Menger sponge, the Sierpinski triangle, and the Koch curve, highlighting their counterintuitive properties, such as infinite perimeters and finite areas.

The article also explores the connection between fractals and population growth, using the logistic function to model the limited growth of biological populations. This is contrasted with the Fibonacci sequence, which describes an idealized and unlimited growth, and it analyzes how uncontrolled population growth can lead to chaos, whose geometry is represented by the Mandelbrot set.

In summary, the article highlights the versatility and importance of fractals in various fields, from entertainment to biology and demography, emphasizing their mathematical beauty and ability to describe complex patterns in nature.

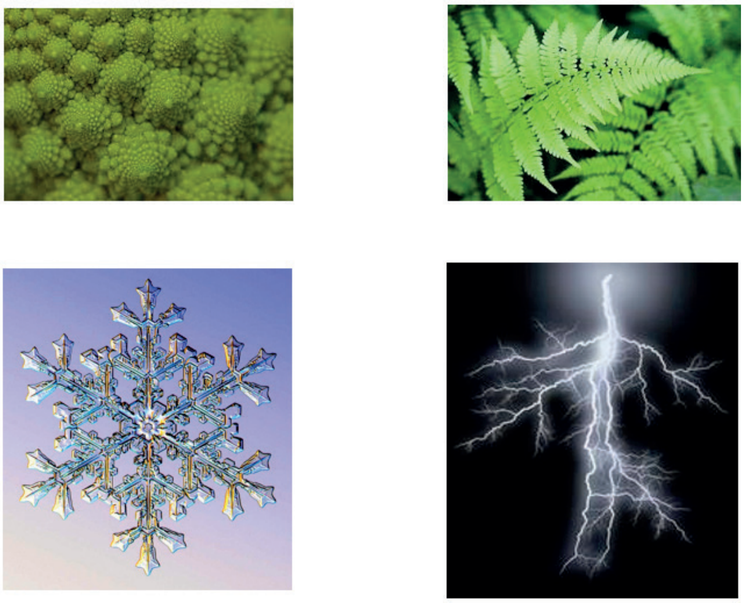
Keywords: Fractals, Population Growth, Cinematic Applications, Non-Euclidean Geometry

El universo fractal

Existen diferentes tipos de geometrías.Geometría analítica, geometría euclidiana, geometrías no euclidianas, geometría descriptiva, geometría sagrada, topología geométrica, geometrías conformes, entre otras. De las geometrías que se encuentran asociadas a su representación, encontramos a la geometría fractal o fractales , la cual es un tipo de geometría que, en su estructura,se auto replica a sí misma a diferentes escalas, en donde cada una de sus partes, se asemejan al todo.

Ésta geometríaadjudicada principalmente al matemático polaco Benoît Mandelbrot, vendría a considerarse una geometría “intermedia”, en el sentido en que ésta se encuentra – y en comparación con la geometría euclidiana- entre dimensiones enteras.

Revista ENTROPIA EDUCATIVA
ISSN: 2981-4723 (En línea) VOL 1 N° enero - junio 2024 pp. 27- 34



Gráfica 1. Fuente del autor.

La geometría fractal es un ramo de la matemática que posee características interdisciplinares. Se encuentra en campos tan diversos como: la economía, la biología, la estadística, la medicina, la sociología, la música, las ciencias de la computación y por supuesto, el arte y el diseño.

Los fractales actualmente son utilizados en el diseño y en animaciones generadas por ordenador.

Han sido la solución idónea a diferentes obstáculos de animación, como por ejemplo, en la película la guerra de las galaxias –la venganza de los Sith-, la escena en la que Obi Wan, pelea con Anakin. En la simulación de las salidas de lava, expulsadas en trayectorias parabólicas, no fueron lo suficientemente realistas, hasta que no fueron aplicadas algunas capas fractales, iteradas a las salidas de lava.

O en doctor Strange de Marvel, de donde se puede apreciar en varias escenas, el uso de los fractales para generar gran variedad de escenarios o efectos como la espiral de Arquímedes.

En otro orden de ideas, el campo de los fractales está rodeado de diversas figuras geométricas

Revista ENTROPIA EDUCATIVA
ISSN: 2981-4723 (En línea) VOL 1 N° enero - junio 2024 pp. 27- 34

interesantes, propias de su disciplina, tales como: La esponja de Menger, el triángulo de Sierpinski, la curva de Koch, los fractales de Cantor, el fractal de Mandelbrot – Julia, entre otros. Estos objetos, fueron considerados monstruos de la matemática, por las propiedades que poseen. Como por ejemplo, el copo de nieve de Koch, la cual es una curva fractal cerrada y continua, con propiedades anti intuitivas, tal y como que su perímetro infinito, pero un área finita.

Gráfico 2. Fuente: Disney

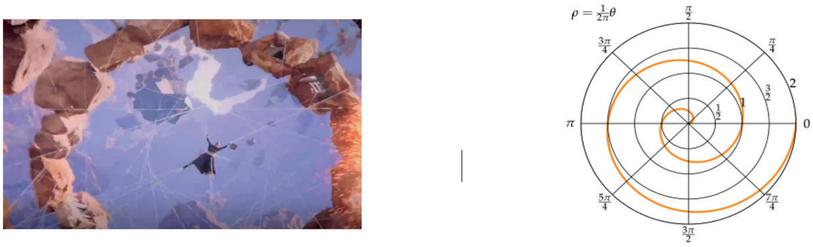


Gráfico 3. Fuente: Disney

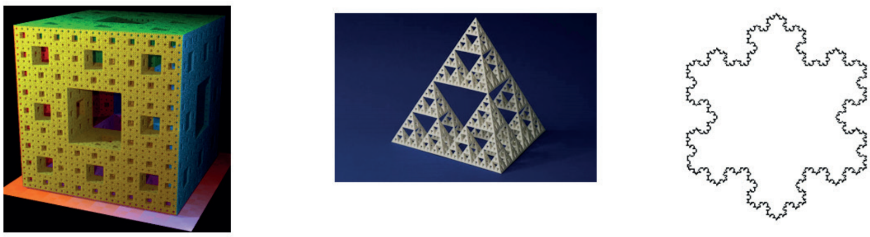


Gráfico 4 Fuente: Autor

Los fractales como figura geométrica son muy fascinantes, pero no son el único objeto de interés de la comunidad científica. Los fractales tienen nexos -entre otros campos- con la demografía. Preguntarse, por ejemplo, si el crecimiento de las poblaciones silvestres, o de cualquier forma de vida orgánica, puede tender a ser infinita, es una respuesta que puede aproximarse a través de ésta disciplina.

Revista ENTROPIA EDUCATIVA

ISSN: 2981-4723 (En línea) VOL 1 N° enero - junio 2024 pp. 27- 34

Dejando de lado, que en principio el infinito es un concepto matemático perteneciente al mundo de las ideas, y que por lo tanto, aplicarlo a unos recursos y al crecimiento de una población, implicaría, que estos fuesen inagotables, así como eternas las vidas de los seres orgánicos que la componen, y que en consecuencia, tal caracterización no tendría mucho sentido en el mundo físico, podría decirse entonces, que el crecimiento de las poblaciones no crece al infinito. La ecuación que da cuenta de este fenómeno es la función logística. Aunque existan suficientes recursos para sustentar la vida de una población, por -digamoseones, los seres vivos tienen fecha de caducidad, la razón de cambio entre las tasas de natalidad y mortalidad, la competencia por los recursos, y otros factores de la naturaleza, mantienen en equilibrio la capacidad de sostenibilidad del ambiente, y de los seres vivos que la habitan, generando un ecosistema, una suerte de balance que impiden que los actores que participan en el sistema, se salgan de control, manteniendo las condiciones del entorno, favorables para todos.

Es bien conocido que la sucesión de números que describe –entre otra gran variedad de fenómenosel crecimiento de una población de conejos, fue acuñada en el siglo XIII, por el matemático italiano Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci. Esta sucesión se forma partiendo de tener dos números 1 (uno) y para obtener el siguiente número, lo que se hace es sumar los dos anteriores. Esta sucesión corresponde a:

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55\ldots$$

La sucesión de Fibonacci es recursiva e infinita, cuya forma general plantea que:

$$Fn = Fn-1 + Fn-2$$

Donde Fi es un número de Fibonacci. Efectivamente si se tiene dos conejos, el número de descendientes de una pareja es la suma de los antecesores. Es decir, la hipótesis es que cada pareja da origen a otra pareja cada año a partir de los dos años de vida. El número de parejas al cabo de n años, es Fn.

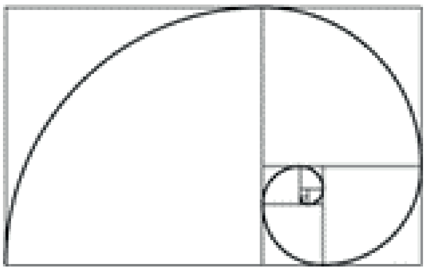
Este ritmo de crecimiento de la población de conejos es ideal, pues los conejos nunca mueren, es decir, todo muy improbable desde el punto de vista de la biología, pero muy útil desde el punto de vista de la matemática. Mas sin embargo, desde un punto de vista más sensato, más acorde con la realidad, en donde los conejos si mueren, la población de conejos puede ser modelada con la ya mencionada función logística, la cual es una función que describe el comportamiento incremental de las poblaciones de seres vivos.

Revista ENTROPIA EDUCATIVA
ISSN: 2981-4723 (En línea) VOL 1 N° enero - junio 2024 pp. 27- 34

Donde P es la población, t el tiempo y k algún recurso crítico del cual la población debe abastecerse.

$$P(t) = \frac{k}{1 + e^{-t}}$$

Existe una conexión entre función logarítmica y los fractales. Un rectángulo áureo es una figura fractal, la cual se replica a sí misma a diferentes escalas. Este rectángulo formado a su vez por cuadrados de lado que siguen la sucesión de Fibonacci, dibuja una espiral logarítmica uniendo los vértices consecutivos de los cuadrados en su interior.



Grafica 5. Espiral áurea. Fuente Autor

Ahora bien, podría pensarse en una población de seres vivos, la cual crezca de manera ingente en el tiempo, y se desarrolle bajo unas condiciones ambientales lo suficientemente propicias como para sustentar la vida por largos periodos de tiempo. La función que da cuenta del crecimiento de poblaciones que tienden a ser "infinitos" es:

$$Xn-1 = rxn(1 - xn)$$

Esta ecuación, si se coloca en comparación el crecimiento de la población de equilibrio en dependencia de la tasa de crecimiento r, se obtiene un gráfico muy particular que describe el comportamiento del caos. Para valores bajos de r, las poblaciones siempre se extinguen, y el valor de equilibrio es cero.

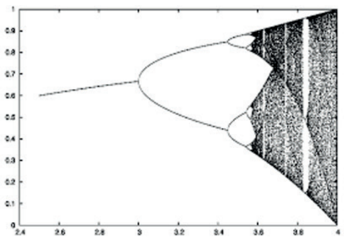
Pero una vez que r llega a ser uno, la población de equilibrio se estabiliza y seguirá creciendo en cuanto mayor sea r.

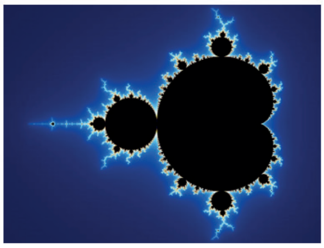
Pero una vez que la tasa de crecimiento r supera el valor de tres, el gráfico se bifurca, la población comienza a oscilar entre un año y otro. Un año la población es mayor, al siguiente menor y así sucesivamente, lo cual es un modelo acorde

Revista ENTROPIA EDUCATIVA
ISSN: 2981-4723 (En línea) VOL 1 N° enero - junio 2024 pp. 27- 34

con las temporadas de caza de conejos que permite, por ejemplo, el gobierno de E.E.U.U.

Todo esto está muy bien, hasta que la gráfica se vuelve a bifurcar nuevamente. Ahora las poblaciones oscilan por un ciclo de 4, cada año, antes de volver a repetirse. A esto se le conoce como bifurcación de periodo doble. En el análisis de éste gráfico se observa que, en la medida que crezca r, la bifurcaciones se repiten cada vez más rápido por periodos de 8 , 16, 32, 64 y cuando r=3,57, la gráfica explota en caos. Parace no seguir patrón alguno, pero si se observa con detenimiento, la geometría de la gráfica de bifurcaciones, ésta es fractal y corresponde al conjunto de Mandelbrot.





Grafica 6. Fuente Autor

En consecuencia, a niveles teóricos, las poblaciones de conejos, tenderían al caos, si no existe algún agente de control que limite su crecimiento. Así mismo, la población de abejas, que tienden a crecer bajo el mismo patrón de Fibonacci En teoría, si se supera cierto límite, toda población de seres vivos tendería al caos, sin restricciones ambientales que limiten su crecimiento.

Referencias

Arumadigital [arumadigital]. (16 de enero de 2014). After Effects 110 Lava y líquidos tur-bulentos con ruido y desplazamiento [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=MGvAH9xgR4w

Bonev, B. I. (s.f.). Teoría del caos. edu.co. Recuperado el 7 de agosto de 2022 de https://disi.unal.edu.co/~lctorress/PSist/PenSis53.html

Buisson, M. [UCzDEebx6jHZiJ4oDfCzZPUQ]. (21 de enero de 2014). star wars III tpe fracta-les [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=Ubu-xNGRPegs

Educación, M. y C. [UCY4turDBadil6YESSymQ3VQ]. (27 de julio de 2013). Aplica-

ISSN: 2981-4723 (En línea) VOL 1 N° enero - junio 2024 pp. 27- 34

ciones de los fractales en la industria cinematográfica 1 [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=dJFM5xGclQc

Geometría, A. [ArturoGeometria]. (6 de agosto de 2016). Espiral de Arquímedes [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=UGEx0Hf1-0Q

SP-DIVERSE [SPDIVERSE]. (11 de marzo de 2022). SPIDER MAN DERROTA AL DOCTOR STRANGE CON EL ESPIRAL DE ARQUÍMEDES EN LA DIMENSIÓN ESPEJO || SMNWH [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/shorts/qU-jknEfBI6E

Universidad de Jaén. (s.f.). Ujaen.es. Recuperado el 7 de agosto de 2022 de http://ucua.ujaen.es/jnavas/mayores/fibonacci.pdf